

$A_5$  est l'unique groupe simple d'ordre 60 !

1) Prérequis: (Groupe dérivée d'un groupe  $G$ )

- i) Comment définit-on  $D(G)$  ?
- ii) Mg.  $D(G) \trianglelefteq G$ . (Rq: C'est même le plus petit tel que  $G/H$  soit commutatif.)
- iii) Mg.  $G$  est abélien  $\Leftrightarrow D(G) = \{e\}$

Questions: 1) Dans le 4) pourquoi montre t-on que  $G \hookrightarrow A_6$  ?

2) Montrer que:  $\text{Stab}_G(x) \trianglelefteq \sigma_{n-1}$  (où  $x \in \{1, n\}$ )

[Rombaldi] - p12

Prérequis: i)  $D(G)$  est le sous-groupe de  $G$  engendré par les commutants.

(c-à-d: les éléments de  $G$  définis par:  $\forall g, g' \in G, [g, g'] = gg'g^{-1}g'^{-1}$ )

ou encore:  $D(G) = \{[g, g'] \mid g, g' \in G\}$

ii) On mq.  $\forall g, g', g'' \in G, g[g', g'']g^{-1} = [gg'g^{-1}, gg''g^{-1}]$

$\rightarrow$  C'est un jeu d'écriture.

$$gg'g^{-1}gg''g^{-1}(gg'g^{-1})^{-1}(gg''g^{-1})^{-1}$$

$$g[g', g'']g^{-1} = g(g'g''g'^{-1}g''^{-1})g^{-1}$$

$$= gg'(g^{-1}g)g''(g^{-1}g)g'^{-1}(g^{-1}g)g''^{-1}g^{-1}$$

a/

iii)  $G$  abélien  $\Leftrightarrow \forall g, g' \in G, gg' = g'g$

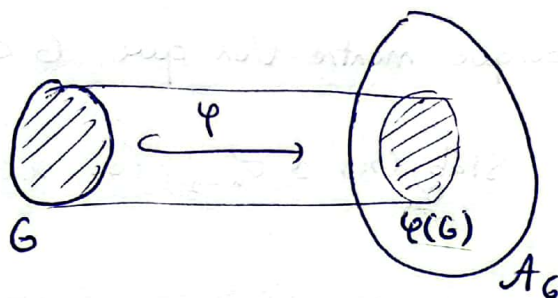
$\Leftrightarrow \forall g, g' \in G, gg'g^{-1}g'^{-1} = e$

$\Leftrightarrow \forall g, g' \in G, [g, g'] = e.$

Questions: 1) on montre que  $G \xrightarrow{\varphi} A_6$  pour montrer que  $G$  est un sous-groupe de  $A_6$  à isomorphisme près.

Et que  $\left| \frac{A_6}{G} \right| = [A_6 : \text{Im}(\varphi)] = \left( \begin{smallmatrix} \text{indice du sous-grp.} \\ \text{Im}(\varphi) \text{ de } A_6 \end{smallmatrix} \right) \text{ ait du sens.}$

Visualisation:



2) Sans perte de généralité, on peut poser:  $n = n$ .

D'où:  $\text{Stab}_{\mathcal{S}_n}(n) \longrightarrow \mathcal{S}_{n-1}$

$\sigma \longmapsto \sigma|_{[1, n-1]}$

Définit bien un morphisme, injectif et surjectif par construction.

# Simplicité des Groupes

①.



"Vidéo de Caldero"  
- Youtube -

Exemples

•  $A_n$ ,  $n \neq 4$

•  $SO(3)$

•  $SO_n / SO_n \cap \mathbb{R}^* \text{id}$

← (⚠ •  $SO_4$  n'est pas simple !  
•  $SO_5$  est simple)

Applications de la simplicité de groupes :

Soit  $G$  un groupe simple :

i)  $\varphi: G \xrightarrow{\varphi} H$  morphisme est soit trivial / soit injectif  
(car:  $\text{Ker}(\varphi) \trianglelefteq G \Rightarrow \text{Ker}(\varphi) = \{e\}$  ou  $G$ )

ii)  $\varphi: G \longrightarrow H$  où  $|G| \nmid |H| \Rightarrow \varphi$  est trivial  
(si:  $\varphi$  est injectif, alors  $|G| \mid |H|$ )

iii) Soit  $C \subsetneq G$  alors  $\langle C \rangle = G$  ( $C$  non trivial)  
classe de conj.

(N'importe quelle classe de conjugaison engendre  $G$ )